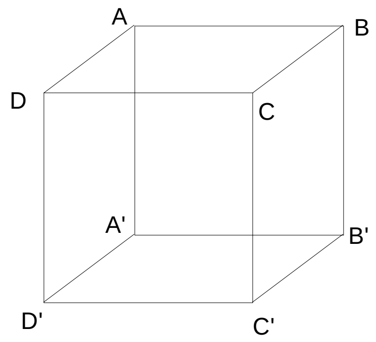
Exercice 31 : groupe des isométries du cube



1°/ Soit $\mathbb{S}$ l'ensemble des 8 sommets du cube. Si $f \in G_+$ l'image d'un sommet du cube est un sommet du cube, donc G_+ agit sur $\mathbb{S}$. Si pour tout sommet S du cube on a $f(S) = S$, alors f laisse invariant un repère affine de l'espace donc $f = \mathrm{Id}$ et l'action de G_+ sur les sommets du cube est fidèle.

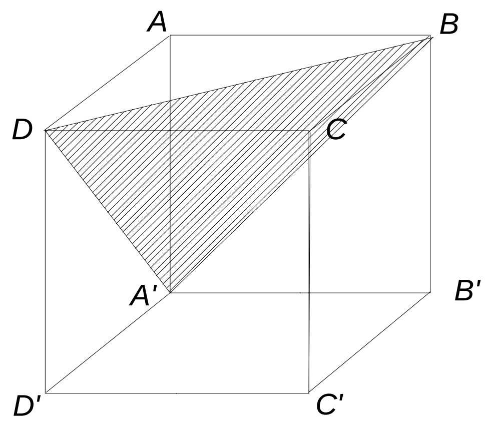
L'homomorphisme de groupes φ de G_+ dans le groupe des bijections des sommets correspondant à cette action est injective. Ce dernier groupe est isomorphe à S_8 donc il est fini et par suite G_+ aussi.

2°/ O est l'isobarycentre des sommets du cube, donc f(O) est l'isobarycentre des images par f de ces sommets (car une application affine conserve le barycentre). Comme $f(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$ on a f(O) = O.

3°/ On vérifie facilement que pour tout sommet S du cube il existe une rotation f de l'espace telle que $f(A) = S$ (par exemple si $S = D$, on peut prendre pour f le demi-tour d'axe passant par les milieux de $[AD]$ et de $[C'B']$; si $S = C$ on peut prendre pour f le demi-tour d'axe passant par les milieux des faces $ABCD$ et $A'B'C'D'$; si $S = C'$ on peut prendre pour f le demi-tour d'axe orthogonal au plan BDC' et passant par O, etc...).

Par conséquent l'orbite $G_+.A$ de A est l'ensemble des sommet du cube et a donc 8 éléments.

D'autre part soit f appartenant au stabilisateur G_{+A} de A i.e $f(A) = A$; si f est distincte de l'identité c'est donc une rotation d'axe (AO) d'après la question précédente. Les points A, O et C' appartiennent aux plans médiateurs de $[BD]$ et de $[A'D]$ donc ces points sont alignés et le plan BDA' est orthogonal à la droite (AO). De plus si Ω le point d'intersection de la droite (OA) et du plan BDA', Ω est l'intersection des deux médiatrices $[BD]$ et de $[A'D]$ du triangle équilatéral BDA' donc Ω est le centre de ce triangle. Le plan BDA' est donc globalement invariant par f, et la restriction de f à ce plan est une rotation r. L'image de B par r étant égale à A' ou D, et le triangle BDA' étant équilatéral, r est donc la rotation d'angle $2\pi/3$ ou $-2\pi/3$ (une orientation étant choisie sur (OA)). Réciproquement une rotation f d'axe $(OA) = (AC')$ d'angle $2\pi/3$ ou $-2\pi/3$ invarie globalement le cube : en effet les points B, D et A' sont globalement invariants par f d'après ce qu'on vient de dire et une démonstration analogue montre qu'il en est de même pour les points B', C et D'.



Par conséquent le stabilisateur de A possède 3 éléments. La proposition du 4.1 donne $|G_+|/|G_{+A}| = |G_+.A|$, soit $|G_+|/3 = 8$ ou $|G_+| = 8 \times 3 = 24$.

4°/ Si $[MN]$ est une diagonale du cube et si $[M'N']$ est son image par un élément f de G_+ on a $MN = M'N' = \sqrt{3}\,a$ (où a est le côté du cube), donc $[M'N']$ est une diagonale du cube. Par conséquent le groupe G_+ agit sur les diagonales du cube.

On peut donc considérer le morphisme de groupes φ correspondant de G_+ dans $S(\mathfrak{D})$, groupe symétrique de $\mathfrak{D}$, qui à f associe la bijection $(d \mapsto f(d))$ de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{D}$. Si $\varphi(f) = \mathrm{Id}$ pour f élément de G_+, f conserve globalement toutes les diagonales du cube. Si une des diagonales, $[AC']$ par exemple, est invariante point par point, et si f est distincte de l'identité, c'est une rotation d'axe $[AC']$. Le raisonnement du 3°/ montre que l'angle de f est $2\pi/3$ ou $-2\pi/3$ et l'image de B est D ou A', donc la diagonale $[BD']$ ne serait pas invariante. Si aucune des diagonales n'est invariante point par point f serait la symétrie centrale de centre O, qui n'est pas un déplacement de l'espace. Par conséquent on a $f = \mathrm{Id}$. L'application φ est donc injective; de plus Card G_+ = Card $S(\mathfrak{D}) = 4! = 24$ (car Card $\mathfrak{D} = 4$), donc φ est bijective et c'est donc un isomorphisme de G_+ dans $S(\mathfrak{D})$, qui lui-même est isomorphe à S_4.

5°/ Soit G_- l'ensemble des antidéplacements invariant le cube. La symétrie s_O de centre O appartient à G_-. L'application de G_+ dans G_- qui à f associe $f \circ s_O$ est clairement bijective. Par conséquent $|G_+| = |G_-|$ soit $|G| = 48$.

Pour décrire entièrement G il suffit donc de décrire les éléments de G_+.

Soit f un élément de G_+ distinct de l'identité. On a vu que f est une rotation dont l'axe passe par O, et que si l'axe passe par un sommet (A par exemple) f est une rotation d'axe la diagonale (AC') d'angle $2\pi/3$ ou $-2\pi/3$. Le cube ayant 4 diagonales il y-a $4 \times 2 = 8$ de telles rotations qui sont toutes d'ordre 3.

Supposons que l'axe de f coupe une arête ([AB] par exemple) en un point qui n'est pas un sommet. Ce point d'intersection étant invariant par f et l'image d'une arête par f étant un arête du cube on en déduit que [AB] est globalement invariante par f. Par conservation du barycentre le milieu de cette arête est invariant par f donc f est une rotation d'axe δ passant par le milieu de [AB] et O : cet axe passe aussi par le milieu du côté [$D'C'$] opposé à [AB]. Comme l'image de A par f est B on conclut que f est le demi-tour d'axe δ. On vérifie que ce demi-tour conserve bien le cube. Le cube ayant 6 paires d'arêtes opposées il y-a 6 de tels demi-tours qui sont d'ordre 2.

Supposons que l'axe de f coupe une face ($ABCD$ par exemple) en un point qui n'appartient pas à une arête. Ce point d'intersection étant invariant par f et l'image d'une face du cube par f étant une face du cube on en déduit que la face $ABCD$ est globalement invariante par f. Comme précédemment on en déduit que son centre est invariant par f donc f est une rotation d'axe δ passant par ce centre et O (cet axe passe aussi par le centre de la face $A'B'C'D'$ opposée à $ABCD$). Comme l'image de A par f est B ou C ou D on conclut que f est une rotation d'axe δ et d'angles $\frac{\pi}{2}$, π ou $\frac{3\pi}{2}$. On vérifie que ces rotations conservent bien le cube. Le cube ayant 3 paires de faces opposées il y-a $3 \times 3 = 9$ de telles rotations : 3 sont d'ordre 2 et 6 sont d'ordre 4.

Finalement dans G_+ il y-a 1 élément d'ordre 1 (l'identité), 9 éléments d'ordre 2, 8 d'ordre 3 et 6 d'ordre 4.

G_+ n'ayant pas d'éléments d'ordre 24 ce groupe n'est pas cyclique (on aurait pu dire aussi que G_+ n'est pas commutatif car S_4 ne l'est pas, donc G_+ n'est pas cyclique).

6°/ D'après 5°/ tout élément de G_- s'écrit de façon unique $f \circ s_O$ avec $f \in G_+$. Soit l'application de G dans le groupe produit $G_+ \times \{\mathrm{Id}, s_O\}$ qui à $f \in G_+$ associe (f, Id) et à $f \circ s_O$ associe (f, s_O). Cette application est bijective et comme s_O commute avec tout élément de G c'est clairement un homomorphisme de groupes. Comme le groupe $\{\mathrm{Id}, s_O\}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et G_+ à S_4 cela achève la démonstration.